

33º Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA

Uma agradável introdução a topologia e geometria de 3-variedades

Caio Sampaio

Luciana Vasconcelos.

caioorenan@ime.usp.br

lucianamvasc@ime.usp.br

27 de Julho de 2021



- 1 Variedades
- 2 Colagem de Polígonos
- 3 Geometria Euclidiana
 - 3.1 Isometrias Euclidiana



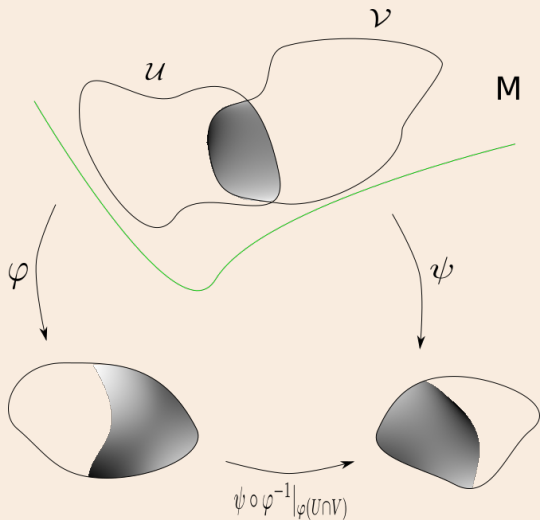
Definição

O espaço topológico M é uma **n -variedade suave** se cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança aberta $U \ni p$ equipada com uma **carta coordenada** $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é um homeomorfismo sobre sua imagem. Além disso, supomos que as cartas coordenadas formam um **atlas diferenciável**.

As cartas coordenadas formam um atlas diferenciável se, para quaisquer cartas

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tais que $U \cap V \neq \emptyset$, a composição $\psi \circ \varphi^{-1}$ é diferenciável e tem uma inversa diferenciável.





O círculo

Seja $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, vamos mostrar que S^1 é uma 1-variedade.



O círculo

Seja $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, vamos mostrar que S^1 é uma 1-variedade. Sejam

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1; y > 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1; y < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1; x > 0\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} \quad e$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto y$$

$$\varphi_4 : U_4 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto y.$$



O círculo

Seja $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, vamos mostrar que S^1 é uma 1-variedade. Sejam

$$U_1 = \{(x, y) \in S^1; y > 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in S^1; y < 0\}$$

$$U_3 = \{(x, y) \in S^1; x > 0\}$$

$$U_4 = \{(x, y) \in S^1; x < 0\} \quad e$$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto x$$

$$\varphi_3 : U_3 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto y$$

$$\varphi_4 : U_4 \rightarrow (-1, 1), \quad (x, y) \mapsto y.$$

Então $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, 4}$ constitui um atlas topológico.



Resta-nos provar que os mapas de transição $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ são suaves.



Resta-nos provar que os mapas de transição $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ são suaves.

Consideremos $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_3) \rightarrow \varphi_3(U_1 \cap U_3)$

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \varphi_3(x, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$$

é claramente C^∞ em $(0, 1) \ni x$.

Analogamente, temos os outros casos.



Consideremos $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde usamos as coordenadas $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Usando a notação $N = (\mathbf{0}, 1)$ e $S = (\mathbf{0}, -1)$, definimos

$$U_S = S^n \setminus \{N\}$$

$$U_N = S^n \setminus \{S\}$$

e

$$g_S : U_S \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1-t} \cdot \mathbf{x}$$

$$g_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_N(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1+t} \cdot \mathbf{x}$$



As inversas são

$$g_S^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{w}\|^2 - 1}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1} \right)$$

e

$$g_N^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1}, \frac{-\|\mathbf{w}\|^2 + 1}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1} \right).$$



As inversas são

$$g_S^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{w}\|^2 - 1}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1} \right)$$

e

$$g_N^{-1}(\mathbf{w}) = \left(\frac{2\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1}, \frac{-\|\mathbf{w}\|^2 + 1}{\|\mathbf{w}\|^2 + 1} \right).$$

As trocas de coordenadas, definidas em $\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}$ são:

$$g_N \circ g_S^{-1}(\mathbf{z}) = g_S \circ g_N^{-1}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|^2}$$

são as inversões na esfera unitária em \mathbb{R}^n .



Proposição

Se M e N são duas variedades diferenciáveis de $\dim M = m$ e $\dim N = n$ então $M \times N$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n + m$.



Proposição

Se M e N são duas variedades diferenciáveis de $\dim M = m$ e $\dim N = n$ então $M \times N$ é uma variedade diferenciável de dimensão $n + m$.

Ideia da Prova:

Sejam $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ e $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ dois atlas diferenciáveis sobre M e N então

$$\{U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta\}$$

é um atlas diferenciável sobre $M \times N$.

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta &\rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ (p, q) &\mapsto (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)). \end{aligned}$$





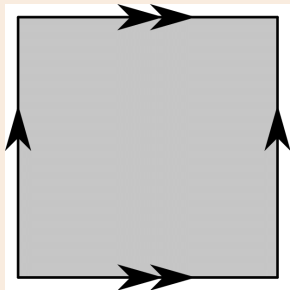
Exemplo

- ▶ $S^1 \times S^1$ (*toro*)
- ▶ $S^1 \times \mathbb{R}$ (*cilindro*)
- ▶ $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$

são variedades suaves.

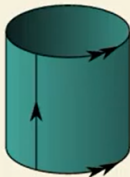
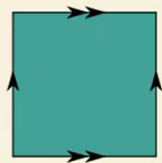


Qual superfície é esse quociente?





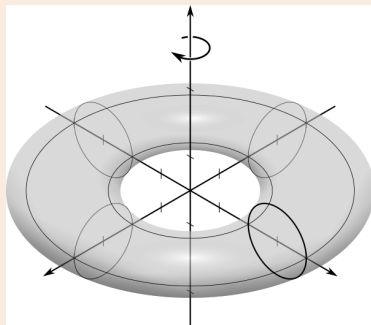
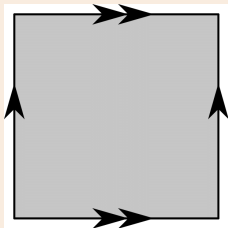
Colagem de Polígonos





Observação

Existe um homeomorfismo explícito entre o toro retangular e o toro de revolução.

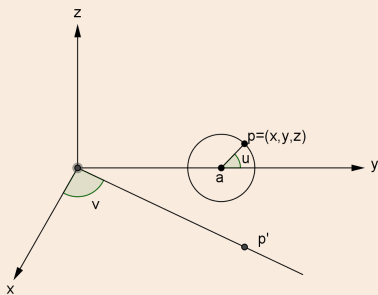




Observação

Existe um homeomorfismo explícito entre o toro retangular e o toro de revolução.

Ideia da prova:

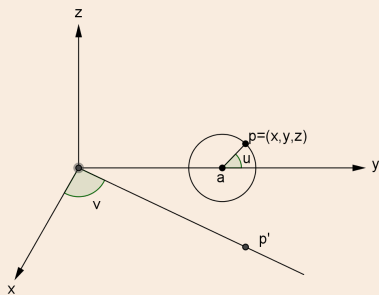




Observação

Existe um homeomorfismo explícito entre o toro retangular e o toro de revolução.

Ideia da prova:



Uma fórmula que define o toro de revolução T ,
 $\mathcal{X} : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow T$, é dada por

$$\mathcal{X}(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u)$$



Podemos definir

$$\bar{\mathcal{X}} : [0, 2\pi]/(0 \sim 2\pi) \times [0, 2\pi]/(0 \sim 2\pi) \rightarrow T$$

$$\bar{\mathcal{X}}([u], [v]) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u)$$

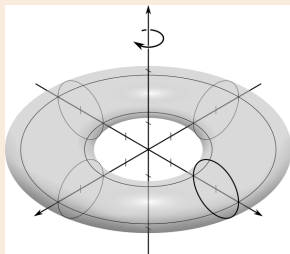
e teremos que este será um homeomorfismo entre o toro plano e o toro de revolução.



Alguns links interessantes:

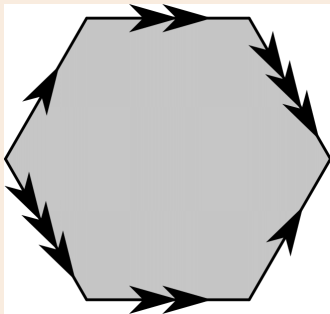
<https://www.geogebra.org/m/hbYvw5Sp>

<https://www.geogebra.org/m/ZcEByA4B>



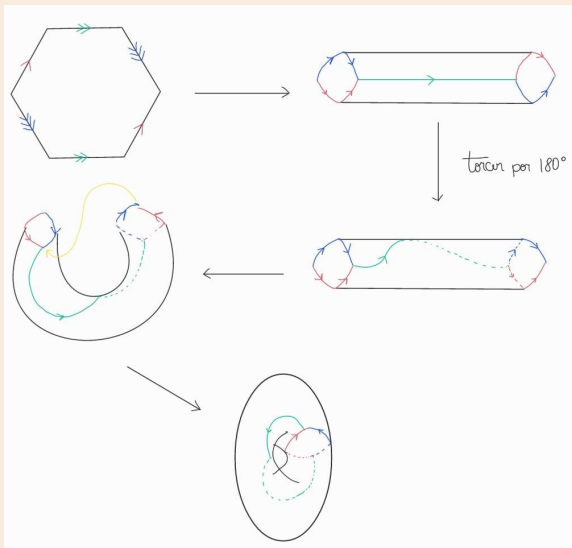


Qual superfície é esse quociente?



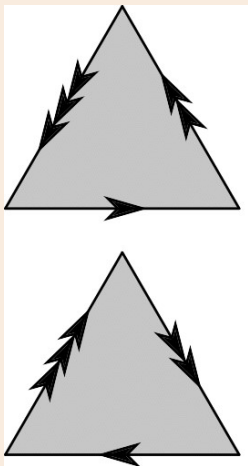


Colagem de Polígonos



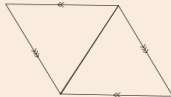
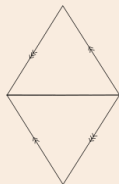


Colagem de Polígonos





Colagem de Polígonos





Para lembrar...

Definição

Uma *métrica riemanniana* na variedade M é uma escolha de uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em cada espaço tangente $T_p M$. A família de formas $\{\langle \cdot, \cdot \rangle\}_{p \in M}$ tem de satisfazer as seguintes propriedades: Para cada p e cada vetor tangente \mathbf{v} em p , temos

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p \geq 0$$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

O produto escalar $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_p$ depende suavemente do ponto p .



Exemplo

Suponha $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ tem a métrica riemanniana dada por

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{(x,t)}^M = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{t^2}.$$

Vamos calcular o comprimento, nessa métrica riemanniana, do segmento vertical entre os pontos $(0, a)$ e $(0, b)$, onde $b > a > 0$.



Exemplo

Suponha $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ tem a métrica riemanniana dada por

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle_{(x,t)}^M = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{t^2}.$$

Vamos calcular o comprimento, nessa métrica riemanniana, do segmento vertical entre os pontos $(0, a)$ e $(0, b)$, onde $b > a > 0$.

Com efeito, dadas

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\gamma} : [a, b] & \rightarrow & M \\ y & \mapsto & (0, y) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lcl} \beta : [0, 1] & \rightarrow & [a, b] \\ x & \mapsto & (b - a)x + a \end{array}$$



Temos

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto (0, (b - a)t + a). \end{aligned}$$



Temos

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto (0, (b - a)t + a).\end{aligned}$$

Ou seja, $\gamma'(t) = (0, b - a)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\text{comp } \gamma &= \int_0^1 \frac{(b - a)}{((b - a)t + a)} dt \\ &= \ln((b - a)t + a) \Big|_0^1 \\ &= \ln b - \ln a \\ &= \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}$$



Temos

$$\begin{aligned}\gamma : [0, 1] &\rightarrow M \\ t &\mapsto (0, (b-a)t + a).\end{aligned}$$

Ou seja, $\gamma'(t) = (0, b-a)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\text{comp } \gamma &= \int_0^1 \frac{(b-a)}{((b-a)t + a)} dt \\ &= \ln((b-a)t + a) \Big|_0^1 \\ &= \ln b - \ln a \\ &= \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Obs. Poderíamos fazer

$$\text{comp } \tilde{\gamma} = \int_a^b \|\tilde{\gamma}(t)\|^2 = \int_a^b \frac{1}{t} = \ln t \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a}.$$



Definição

Seja M uma variedade suave com uma métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M}$. Um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ é uma **isometria** de M se, para cada ponto $p \in M$ e cada par de vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$, vale a igualdade

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle D\psi_p(\mathbf{v}), D\psi_p(\mathbf{w}) \rangle_{\psi(p)}.$$



Definição

Seja M uma variedade suave com uma métrica riemanniana $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in M}$. Um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow M$ é uma **isometria** de M se, para cada ponto $p \in M$ e cada par de vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$, vale a igualdade

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle D\psi_p(\mathbf{v}), D\psi_p(\mathbf{w}) \rangle_{\psi(p)}.$$

Observação

- ▶ $\text{Isom}(M)$ e $\text{Isom}^+(M)$ são grupos com a operação binária \circ da composição de funções.



Exemplo

Voltando ao exemplo de $M = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$, consideremos a inversão no círculo unitário,

$$\iota(x, t) = \frac{1}{x^2 + t^2}(x, t), \quad \iota : M \rightarrow M.$$

Vamos mostrar que ι é uma isometria, ou seja,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{(x,t)} = \langle D\iota_{(x,t)}(\mathbf{v}), D\iota_{(x,t)}(\mathbf{w}) \rangle_{\iota(x,t)}$$

para quaisquer vetores \mathbf{v}, \mathbf{w} .



Temos que

$$D\iota = \begin{bmatrix} \frac{\partial \iota_1}{\partial x} & \frac{\partial \iota_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \iota_2}{\partial x} & \frac{\partial \iota_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} & -\frac{2tx}{(t^2 + x^2)^2} \\ -\frac{2tx}{(t^2 + x^2)^2} & \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t^2 + x^2)^2} \begin{bmatrix} t^2 - x^2 & -2tx \\ -2tx & x^2 - t^2 \end{bmatrix}$$



Temos que

$$D\iota = \begin{bmatrix} \frac{\partial \iota_1}{\partial x} & \frac{\partial \iota_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \iota_2}{\partial x} & \frac{\partial \iota_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} & -\frac{2tx}{(t^2 + x^2)^2} \\ -\frac{2tx}{(t^2 + x^2)^2} & \frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(t^2 + x^2)^2} \begin{bmatrix} t^2 - x^2 & -2tx \\ -2tx & x^2 - t^2 \end{bmatrix}$$

Por um lado,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{(x,t)} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{t^2}.$$



Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle D\iota(\mathbf{v}), D\iota(\mathbf{w}) \rangle_{\iota(x,t)} &= \frac{(t^2 + x^2)^2}{t^2} \frac{1}{(t^2 + x^2)^4} (D\iota\mathbf{w})^T (D\iota\mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{t^2(t^2 + x^2)^2} \mathbf{w}^T D\iota^T D\iota\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{t^2(t^2 + x^2)^2} \mathbf{w}^T D\iota^2\mathbf{v} \\ &= \frac{1}{t^2(t^2 + x^2)^2} \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} (t^2 + x^2)^2 & 0 \\ 0 & (x^2 + t^2)^2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{t^2(t^2 + x^2)^2} (t^2 + x^2)^2 \mathbf{w}^T \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{t^2} \mathbf{w}^T \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{t^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.\end{aligned}$$



Exemplo

Seja A uma matriz $n \times n$. A derivada da transformação linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ é constante e igual à matriz A .



Exemplo

Seja A uma matriz $n \times n$. A derivada da transformação linear $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ é constante e igual à matriz A .

Com efeito, seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Dessa forma,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{bmatrix}.$$



E, conseqüentemente, a matriz Jacobiana será dada por

$$J(A\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A$$



Exemplo

A transformação $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ é uma isometria da geometria euclidiana, desde que $A \in O(n)$.



Exemplo

A transformação $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ é uma isometria da geometria euclidiana, desde que $A \in O(n)$.

De fato, temos que

$$\langle DA(\mathbf{v}), DA(\mathbf{w}) \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

já que $A \in O(n)$.



Teorema

Cada isometria euclidiana $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que fixa a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ tem a forma $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para uma matriz $A \in O(n)$. Reciprocamente, cada matriz $A \in O(n)$ determina uma isometria euclidiana.



Existem isometrias de \mathbb{R}^n que não fixam a origem. Por exemplo, a **translação** pelo vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

leva a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ao ponto \mathbf{b} .



Existem isometrias de \mathbb{R}^n que não fixam a origem. Por exemplo, a **translação** pelo vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

leva a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ao ponto \mathbf{b} .

Exemplo

Para qualquer vetor fixo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, a translação $\tau_{\mathbf{b}}$ é uma isometria da geometria euclidiana.



Existem isometrias de \mathbb{R}^n que não fixam a origem. Por exemplo, a **translação** pelo vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

leva a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ ao ponto \mathbf{b} .

Exemplo

Para qualquer vetor fixo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, a translação $\tau_{\mathbf{b}}$ é uma isometria da geometria euclidiana.

Temos que $D\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \text{id}(\mathbf{x})$. Então,

$$\langle D\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{v}), D\tau_{\mathbf{b}}(\mathbf{w}) \rangle = \langle \text{id}(\mathbf{v}), \text{id}(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$



Se combinarmos as isometrias da forma $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ com as translações do slide anterior, obtemos um nova isometria

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in O(n), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$



Se combinarmos as isometrias da forma $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ com as translações do slide anterior, obtemos um nova isometria

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in O(n), \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema

Cada isometria $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ da geometria euclidiana tem a forma $\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ para uma única matriz ortogonal $A \in O(n)$ e um único vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.



Ideia da Prova.

Seja $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ uma isometria qualquer e definamos $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$.



Ideia da Prova.

Seja $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ uma isometria qualquer e definamos $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$. A composição $\psi := \tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi$ é uma isometria de \mathbb{R}^n . Então,

$$\psi(\mathbf{0}) = (\tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi)(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0}) - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$



Ideia da Prova.

Seja $\phi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ uma isometria qualquer e definamos $\mathbf{b} = \phi(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^n$. A composição $\psi := \tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi$ é uma isometria de \mathbb{R}^n . Então,

$$\psi(\mathbf{0}) = (\tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi)(\mathbf{0}) = \phi(\mathbf{0}) - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Pelo resultado visto anteriormente, existe uma única matriz $A \in O(n)$ tal que $\psi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Assim,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \text{id} \circ \phi(\mathbf{x}) \\ &= (\tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{-\mathbf{b}}) \circ \phi(\mathbf{x}) \\ &= \tau_{\mathbf{b}} \circ (\tau_{-\mathbf{b}} \circ \phi)(\mathbf{x}) \\ &= \tau_{\mathbf{b}} \circ \psi(\mathbf{x}) \\ &= A\mathbf{x} + \mathbf{b}.\end{aligned}$$

□



Definição

Seja M uma variedade riemanniana e seja $\text{Isom}(M)$ o grupo de isometrias de M .

1. A variedade riemanniana M é chamada **homogênea** se, para quaisquer pontos $p, q \in M$, existe uma isometria $\psi \in \text{Isom}(M)$ tal que $\psi(p) = q$.



Definição

Seja M uma variedade riemanniana e seja $\text{Isom}(M)$ o grupo de isometrias de M .

1. A variedade riemanniana M é chamada **homogênea** se, para quaisquer pontos $p, q \in M$, existe uma isometria $\psi \in \text{Isom}(M)$ tal que $\psi(p) = q$.
2. A variedade riemanniana M é **isotrópica** se, para cada ponto $p \in M$ e quaisquer vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M$, de norma 1, existe uma isometria $\psi \in \text{Isom}(M)$ que fixa p e satisfaz $D\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.



Exemplo

\mathbb{R}^n é uma variedade riemanniana homogênea e isotrópica.



Exemplo

\mathbb{R}^n é uma variedade riemanniana homogênea e isotrópica.

Homogeneidade: Sejam p, q dois pontos \mathbb{R}^n , e seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\psi(x) = Ix + q - p$, temos que $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, além disso, $\psi(p) = q$. Portanto \mathbb{R}^n é homogêneo.



Exemplo

\mathbb{R}^n é uma variedade riemanniana homogênea e isotrópica.

Homogeneidade: Sejam p, q dois pontos \mathbb{R}^n , e seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $\psi(x) = Ix + q - p$, temos que $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, além disso, $\psi(p) = q$. Portanto \mathbb{R}^n é homogêneo.

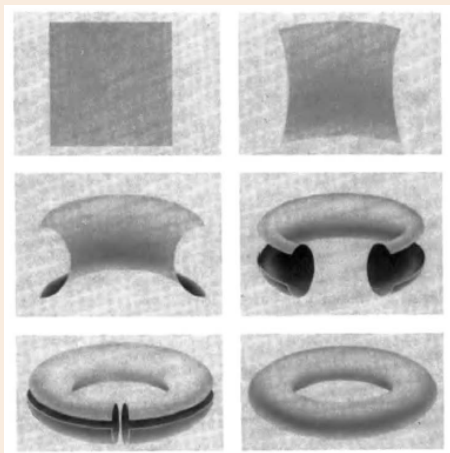
Isotropia: Sem perder a generalidade, vamos assumir que p é a origem. Sejam $v, w \in T_pM$, tal que $\|v\| = \|w\| = 1$, então existe $A \in O(n)$, tal que $Av = w$ (exercício 1.4.5 e), definindo $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, dada por $\psi(x) = Ax$, temos que $\psi(p) = p$, e $D\psi = A$, portanto, $DA(v) = w$.

Extras



Colagem de Polígonos

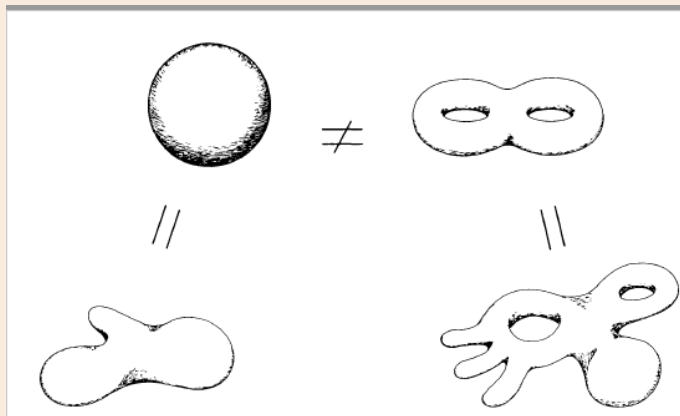
O toro plano tem a mesma topologia da superfície de um donnut.



Fonte: The Shape of Space - Jeffrey R. Weeks.



Topologia de superfícies



Fonte: The Shape of Space - Jeffrey R. Weeks.

As duas superfícies à esquerda são topologicamente indistinguíveis, assim como as duas à direita.



Uma forma simples de definir uma ação de G em X é como um homomorfismo $G \rightarrow \text{Aut}(X)$, onde $\text{Aut}(X)$ é o grupo de automorfismos de X .



Uma forma simples de definir uma ação de G em X é como um homomorfismo $G \rightarrow \text{Aut}(X)$, onde $\text{Aut}(X)$ é o grupo de automorfismos de X .

Definição

Em geral, definimos uma ação à esquerda de G em um conjunto X como uma transformação

$$\cdot : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

com as duas propriedades a seguir, onde $e \in G$ é a identidade em G e $g, h \in G$ são quaisquer dois elementos:

1. $e \cdot x = x$,
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.



Quociente pela ação de grupos

O quociente do grupo de Lie \mathbb{R} pela ação (à direita ou à esquerda, tanto faz) do subgrupo (discreto) $\mathbb{Z} < \mathbb{R} : \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o quociente de \mathbb{R} pela relação que declara equivalentes dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + n$.



Quociente pela ação de grupos

O quociente do grupo de Lie \mathbb{R} pela ação (à direita ou à esquerda, tanto faz) do subgrupo (discreto) $\mathbb{Z} < \mathbb{R} : \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o quociente de \mathbb{R} pela relação que declara equivalentes dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + n$.

Para \mathbb{R}/\mathbb{Z} podemos observar que toda classe de equivalência tem um representante no intervalo $[0, 1]$.

Por outro lado, com exceção de 0 e 1 que são equivalentes, não há nenhum outro par de pontos equivalentes no intervalo $[0, 1]$.



Quociente pela ação de grupos

O quociente do grupo de Lie \mathbb{R} pela ação (à direita ou à esquerda, tanto faz) do subgrupo (discreto) $\mathbb{Z} < \mathbb{R} : \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o quociente de \mathbb{R} pela relação que declara equivalentes dois pontos $x, y \in \mathbb{R}$ se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + n$.

Para \mathbb{R}/\mathbb{Z} podemos observar que toda classe de equivalência tem um representante no intervalo $[0, 1]$.

Por outro lado, com exceção de 0 e 1 que são equivalentes, não há nenhum outro par de pontos equivalentes no intervalo $[0, 1]$.

Conclusão: \mathbb{R}/\mathbb{Z} pode ser entendido como o quociente do intervalo $[0, 1]$ pela decomposição cujo único conjunto não degenerado é o par $\{0, 1\}$. E chegamos assim ao círculo $[0, 1]/(0 \sim 1)$.