33º Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA

Uma agradável introdução a topologia e geometria de 3-variedades

Caio Sampaio
Luciana Vasconcelos.
caiorenan@ime.usp.br
lucianamvasc@ime.usp.br

23 de Julho de 2021

Sumário

Para dois números reais a, b, vamos considerar a matriz

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, podemos definir o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos como

$$\mathbb{C} := \{M_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Para dois números reais a, b, vamos considerar a matriz

$$M_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Com essa notação, podemos definir o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos como

$$\mathbb{C} := \{M_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- Somas e produtos de quaisquer elementos de $\mathbb{C}$ pertencem a $\mathbb{C}$ também, o que mostra que $\mathbb{C}$ é um anel de matrizes.

- Uma matriz $M_{a,b}$ tem uma inversa se e só se $\det M_{a,b} \neq 0$.

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

O círculo

O conjunto de números complexos de módulo 1 é fechado sob multiplicação e, geometricamente, esse conjunto é simplesmente o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}.$$

O círculo

O conjunto de números complexos de módulo 1 é fechado sob multiplicação e, geometricamente, esse conjunto é simplesmente o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}.$$

A definição matricial oferece uma nova maneira de pensarmos sobre o grupo S^1 :

$$S^1 = \{M_{a,b} : \det(M_{a,b}) = 1\}$$

com a operação de produto de números complexos ou produto matricial.

O conjunto de números complexos de módulo 1 é fechado sob multiplicação e, geometricamente, esse conjunto é simplesmente o círculo unitário $S^1 \subset \mathbb{C}$,

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}.$$

A definição matricial oferece uma nova maneira de pensarmos sobre o grupo S^1 :

$$S^1 = \{M_{a,b} : \det(M_{a,b}) = 1\}$$

com a operação de produto de números complexos ou produto matricial.

• O grupo S^1 é isomorfo ao grupo $SO(2)$ de matrizes ortogonais com determinante igual a 1.

Definição

Definimos os quatérnios como as matrizes da forma

$$M_{z,w} = \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

onde z, w são números complexos.

Definição

Definimos os quatérnios como as matrizes da forma

$$M_{z,w} = \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

onde z, w são números complexos.

O conjunto de todos os quatérnios será denotado por

$$\mathbb{H} := \{M_{z,w} : z, w \in \mathbb{C}\}.$$

Estrutura algébrica dos quatérnios

Propriedades

• Somas e produtos dos elementos de $\mathbb{H}$ também pertencem a $\mathbb{H}$.

• $\mathbb{H}$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais.

• As estruturas de espaço vetorial e de anel são compatíveis no seguinte sentido: se, $a, b \in \mathbb{R}$ e $A, B \in \mathbb{H}$ então

$$(aA)(bB) = (ab)(AB).$$

Propriedades dos Quatérnios

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, podemos decompor o quatérnio $M_{z,w}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
M_{z,w} &= \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a + bi & -c - di \\ c - di & a - bi \end{bmatrix} \\
&= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \\
&= a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

....

$\mathbb{H}$ é um espaço vetorial real de dimensão 4.

....

$\mathbb{H}$ é um espaço vetorial real de dimensão 4.

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ temos

$$0 = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $0 = a + bi = 2bi$ e $0 = -c - di = -2c$. Portanto, $a = b = c = d = 0$ e, consequentemente, **1, i, j, k** são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.

A definição mais corriqueira

....

Tratando $\mathbb{H}$ como um espaço vetorial, podemos escrever,

$$\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

onde simplesmente identificamos a expressão $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ à quádrupla ordenada (a, b, c, d).

A definição mais corriqueira

....

Tratando $\mathbb{H}$ como um espaço vetorial, podemos escrever,

$$\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

onde simplesmente identificamos a expressão $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ à quádrupla ordenada (a, b, c, d).

Declaremos $\mathbf{1}$ ser a unidade multiplicativa e definamos os produtos

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik},$$

e estendamos a operação de produto para todo $\mathbb{H}$ de forma que seja linear sobre os reais e seja distributiva em relação à soma.

A definição mais corriqueira

- Denotaremos assim o quatérnio $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ simplesmente por $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

• Denotaremos assim o quatérnio $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ simplesmente por $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

• O número real a é chamado da **parte real** do quatérnio $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

• Denotaremos assim o quatérnio $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ simplesmente por $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

• O número real a é chamado da **parte real** do quatérnio $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

....

A forma mais corriqueira de definir os quatérnios é:

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Existe um isomorfismo entre as definições de quatérnios vistas até aqui:

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \leftrightarrow M_{\mathbf{q}} = M_{a+ib,c+id} = \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$$

Temos que

$$(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \cdot (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}$$

e, como consequência, se $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ então o quatérnio $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ tem um inverso multiplicativo dado por:

....

$$\mathbf{q}^{-1} = \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\right) \cdot (a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}).$$

Definição

A ***norma*** *do quatérnio* $\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$*, onde* a, b, c, d *são números reais é:*

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in [0, \infty),$$

que corresponde a norma euclidiana do vetor $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ *que é estritamente positiva a menos que* $\boldsymbol{q} = 0$*.*

Definição

*A **norma** do quatérnio $\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$, onde a, b, c, d são números reais é:*

$$\|\boldsymbol{q}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \in [0, \infty),$$

que corresponde a norma euclidiana do vetor $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ que é estritamente positiva a menos que $\boldsymbol{q} = 0$.

Definição

*O **conjugado** do quatérnio $\boldsymbol{q} = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$, onde a, b, c, d são números reais é:*

$$\overline{\boldsymbol{q}} = a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}.$$

Com as definições anteriores concluímos que

$$\boxed{\mathbf{q} \cdot \overline{\mathbf{q}} = \|\mathbf{q}\|^2}$$

e que

$$\boxed{\mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2} \cdot \overline{\mathbf{q}}.}$$

OBS: Um quatérnio $\mathbf{q}$ é um número real, chamado **quatérnio real**, se e somente se, $\mathbf{q} = \overline{\mathbf{q}}$. Um quatérnio da forma $\mathbf{q} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ é chamado de **quatérnio puro**.

Exemplo

Um quatérnio $\boldsymbol{q}$ é puro se e só se $\boldsymbol{q}^2$ é real não positivo.

Exemplo

Um quatérnio $\mathbf{q}$ é puro se e só se $\mathbf{q}^2$ é real não positivo.

Primeiramente observemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^2 =&(q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k}) \cdot (q_1 + q_2\mathbf{i} + q_3\mathbf{j} + q_4\mathbf{k})\\ =&(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) + (q_1q_2 + q_2q_1 + q_3q_4 - q_3q_3)\mathbf{i}\\ &+(q_1q_3 + q_3q_1 + q_4q_2 - q_2q_4)\mathbf{j} + (q_1q_4 + q_4q_1 + q_2q_3 - q_3q_2)\mathbf{k}\\ =&(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) + (2q_1q_2)\mathbf{i} + (2q_1q_3)\mathbf{j} + (2q_1q_4)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Então, se $\mathbf{q}$ é um quatérnio puro, por definição, $q_1 = 0$. Dessa forma, $\mathbf{q}^2 = -q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 \leq 0$. Reciprocamente, para que $\mathbf{q}^2$ pertença a $\mathbb{R}$, precisamos necessariamente que $q_1 = 0$. Ou seja, que $\mathbf{q}$ seja um quatérnio puro.
Neste caso, $q^2 = -\|\mathbf{q}\|^2$.

Proposição

Dado $\boldsymbol{p}$ um quatérnio unitário puro, isto é, $\boldsymbol{p} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k}$, onde u, v, w são números reais satisfazendo $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ temos que a transformação

$$\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad \phi(a + bi) = a + b\boldsymbol{p}$$

é $\mathbb{R}$-linear e define um homomorfismo injetivo entre álgebras reais.

Mais ainda, todos os homomorfismos injetivos de álgebras reais $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$ tem esta forma.

Ideia da prova.

$$\begin{aligned}\phi((a+bi)+(c+di)) =& \phi((a+c)+(b+d)i)\\ =&(a+c)+(b+d)\mathbf{p}\\ =&a+b\mathbf{p}+c+d\mathbf{p}\\ =&\phi(a+bi)+\phi(c+di)\end{aligned}$$

$$\phi(\lambda(a+bi)) =\lambda\phi(a+bi).$$

$$\begin{aligned}\phi((a+bi)(c+di)) =&\phi((ac-bd)+(ad+bc)i)\\ =&(ac-bd)+(ad+bc)\mathbf{p}\\ =&ac+ad\mathbf{p}+bc\mathbf{p}-bd\\ =&ac+ad\mathbf{p}+bc\mathbf{p}+bd\mathbf{p}^2\\ =&(a+b\mathbf{p})(c+d\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Logo, ϕ é um homomorfismo de álgebras reais.

Logo, ϕ é um homomorfismo de álgebras reais.

Mais ainda, se $\phi(a+bi) = \phi(c+di)$ segue que $a + b\mathbf{p} = c + d\mathbf{p}$, ou seja, $a = c$ e $b = d$. Portanto, ϕ é injetiva.

Consideremos $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$ um homomorfismo de álgebras injetivo qualquer.

Logo, ϕ é um homomorfismo de álgebras reais.

Mais ainda, se $\phi(a+bi) = \phi(c+di)$ segue que $a + b\mathbf{p} = c + d\mathbf{p}$, ou seja, $a = c$ e $b = d$. Portanto, ϕ é injetiva.

Consideremos $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$ um homomorfismo de álgebras injetivo qualquer. Temos que,

$$\varphi(a+bi) = \varphi(a) + \varphi(bi) = \varphi(a \cdot 1) + b\varphi(i) = a\varphi(1) + b\varphi(i).$$

Definições importantes

Logo, ϕ é um homomorfismo de álgebras reais.

Mais ainda, se $\phi(a+bi)=\phi(c+di)$ segue que $a+b\mathbf{p}=c+d\mathbf{p}$, ou seja, $a=c$ e $b=d$. Portanto, ϕ é injetiva.

Consideremos $\varphi:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{H}$ um homomorfismo de álgebras injetivo qualquer. Temos que,

$$\varphi(a+bi)=\varphi(a)+\varphi(bi)=\varphi(a\cdot 1)+b\varphi(i)=a\varphi(1)+b\varphi(i).$$

Vejamos que,

$$\varphi(z)=\varphi(z\cdot 1)=\varphi(z)\cdot\varphi(1)\Rightarrow\varphi(1)=1$$

$$-1=\varphi(-1)=\varphi(i^2)=\varphi(i)\cdot\varphi(i)=(\varphi(i))^2.$$

Pelo Exemplo anterior, temos que $\Re(\varphi(i)) = 0$ e, então, $\varphi(i)^2 = \mathbf{p}^2$, onde $\mathbf{p}$ é um quatérnio puro e com $\mathbf{p}^2 = -1$. Como $-1 = \mathbf{p}^2 = -u^2 - v^2 - w^2$, segue que $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, como queríamos.

Pelo Exemplo anterior, temos que $\Re(\varphi(i)) = 0$ e, então, $\varphi(i)^2 = \mathbf{p}^2$, onde $\mathbf{p}$ é um quatérnio puro e com $\mathbf{p}^2 = -1$. Como $-1 = \mathbf{p}^2 = -u^2 - v^2 - w^2$, segue que $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, como queríamos.

Logo,

$$\varphi(a+bi) = \varphi(a)+\varphi(bi) = \varphi(a\cdot 1)+b\varphi(i) = a\varphi(1)+b\varphi(i) = a+b\mathbf{p}.$$

A norma dos quatérnios $\|.\| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é um homomorfismo que nos permite ver a 3-Esfera como um subconjunto de $\mathbb{H}$, da forma

$$\begin{aligned} S^3 = &\{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \\ = &\{\mathbf{q} \in \mathbb{H} : \|\mathbf{q}\| = 1\} \end{aligned}$$

Também chamamos o conjunto de todos os quatérnios de norma 1 de *quatérnios unitários*.

S^3 como grupo

Para relembrar...

- O espaço vetorial $\mathbb{C}^n$ é equipado com a **forma hermitiana canônica**

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k,$$

onde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

- Se A é uma matriz complexa então $A^* = \overline{A^T}$.
- Se fizermos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ então

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}.$$

Para relembrar...

- $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.
- $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$.

Definição

Uma matriz quadrada é unitária se $A^*A = AA^* = I$, onde I é a matriz identidade. O conjunto de todas as matrizes unitárias $n \times n$ é

$$U(n) = \{A \text{ matriz complexa } n \times n : A^*A = AA^* = I\}.$$

Observação

- *Uma matriz $n \times n$ A é unitária se e só se*

$$\langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle, \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}.$$

- *$U(n)$ forma um grupo com a multiplicação de matrizes.*
- *Se $A \in U(n)$ então $\det A$ é um número complexo de valor absoluto 1.*

Definição

$$SU(n) := \{A \in U(n) : \det A = 1\}$$

$S^3 \cong SU(2)$

Teorema

O grupo S^3, de quatérnios de norma 1, é isomorfo a $SU(2)$, grupo de matrizes unitárias 2×2 de determinante 1.

A forma matricial do quatérnio conjugado $\overline{\mathbf{q}}$ é dada por

$$(M_{z,w})^* = \begin{bmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - bi & c + di \\ -c + di & a + bi \end{bmatrix}$$

Seja $\overline{q} = a - bi - cj - dk$. Então

$$\begin{aligned} \overline{q} &= a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - bi & c + di \\ -c + di & a + bi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{bmatrix} = (M_{z,w})^*. \end{aligned}$$

Valem as igualdades
$(M_{z,w})^*(M_{z,w}) = (M_{z,w})(M_{z,w})^* = (|z|^2 + |w|^2)I$

$$\begin{aligned}
(M_{z,w})^*(M_{z,w}) &= \begin{bmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{z} & w \\ -\overline{w} & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\overline{z} + \overline{w}w & zw - zw \\ \overline{wz} - \overline{zw} & \overline{w}w + z\overline{z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |z|^2 + |w|^2 & 0 \\ 0 & |z|^2 + |w|^2 \end{bmatrix} = |z|^2 + |w|^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

onde I é a matriz identidade de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

$S^3 \cong SU(2)$

Teorema

O grupo S^3, de quatérnios de norma 1, é isomorfo a $SU(2)$, grupo de matrizes unitárias 2×2 de determinante 1.

Ideia da prova:

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \leftrightarrow M_{\mathbf{q}} = M_{a+ib,c+id} = \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$$

Teorema

O grupo S^3, de quatérnios de norma 1, é isomorfo a $SU(2)$, grupo de matrizes unitárias 2×2 de determinante 1.

Ideia da prova:

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \leftrightarrow M_{\mathbf{q}} = M_{a+ib,c+id} = \begin{bmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$$

Além disso, $\|\mathbf{q}\| = 1$ se e só se $\det(M_{a+ib,c+id}) = 1$ e

$$(M_{a+ib,c+id})^*(M_{a+ib,c+id}) = I \iff a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

$S^3 \cong SU(2)$

Temos um homomorfismo de grupos

$$\psi : S^3 \to SU(2), \qquad \psi(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = M_{a+ib,c+id}.$$

$S^3 \cong SU(2)$

Temos um homomorfismo de grupos

$$\psi : S^3 \to SU(2), \qquad \psi(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = M_{a+ib,c+id}.$$

- ψ é injetivo.

$S^3 \cong SU(2)$

Temos um homomorfismo de grupos

$$\psi : S^3 \to SU(2), \qquad \psi(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = M_{a+ib,c+id}.$$

- ψ é injetivo.
- ψ é sobrejetivo. Considerando, uma matriz complexa $A \in SU(n)$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}.$$

Temos um homomorfismo de grupos

$$\psi : S^3 \to SU(2), \qquad \psi(a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = M_{a+ib,c+id}.$$

- ψ é injetivo.
- ψ é sobrejetivo. Considerando, uma matriz complexa

$A \in SU(n)$ da forma

$$A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}.$$

conseguimos provar que

$$\mathbf{q} = \mathrm{Re}(z_{11}) + \mathrm{Im}(z_{11})\mathbf{i} + \mathrm{Re}(z_{21})\mathbf{j} - \mathrm{Im}(z_{21})\mathbf{k}$$

é tal que $\psi(\mathbf{q}) = A$ e, na verdade, $A = M_{z_{11},\overline{z_{21}}}$.

$\square$

Primeiramente vamos definir algumas operações com os quatérnios para torná-lo um espaço vetorial complexo. Para isso, consideremos a aplicação

$$\Phi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{H}, \quad \Phi(z, w) = M_{z,w}$$

e declaremos que é a estrutura de espaço vetorial complexo induzida por Φ que queremos considerar em $\mathbb{H}$, isto é, definimos a soma e o produto escalar complexo.

$$\boxed{M_{z_1,w_1} + M_{z_2,w_2} = M_{z_1+z_2,w_1+w_2}, \quad \lambda \cdot M_{z,w} := M_{\lambda z,\lambda w}.}$$

Proposição

Dados $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{H}$ *e* $s, t \in \mathbb{R}$ *temos*

a) $e^{it} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$ *se e somente se* t *é um múltiplo inteiro de* 2π.
b) $e^{i(s+t)} \cdot \boldsymbol{q} = e^{is} \cdot (e^{it} \cdot \boldsymbol{q})$.
c) *Se* $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{q}$ *então* $e^{it} \cdot \boldsymbol{p} \neq e^{it} \cdot \boldsymbol{q}$.

Então, se considerarmos

$$\varphi : \mathbb{R} \times S^3 \longrightarrow S^3, \quad \varphi(t, \mathbf{q}) = e^{it} \cdot \mathbf{q}$$

e a proposição anterior, φ é um **fluxo**.

Definição

*Um **fluxo** γ é uma aplicação contínua que satisfazem as seguintes propriedades:*

i) $\gamma(0, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$,
ii) $\gamma(s+t, \boldsymbol{q}) = \gamma(s, \gamma(t, \boldsymbol{q}))$ *para todos* $s, t \in \mathbb{R}$.

Definição

*Um **fluxo** γ é uma aplicação contínua que satisfazem as seguintes propriedades:*

i) $\gamma(0, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$,

ii) $\gamma(s + t, \boldsymbol{q}) = \gamma(s, \gamma(t, \boldsymbol{q}))$ *para todos* $s, t \in \mathbb{R}$.

OBS: Para $t \in \mathbb{R}$ fixado, definamos $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$. φ_t é um homeomorfismo. Mais ainda, φ_t é um difeomorfismo.

Definição

*Um **fluxo** γ é uma aplicação contínua que satisfazem as seguintes propriedades:*

i) $\gamma(0, \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}$,

ii) $\gamma(s + t, \boldsymbol{q}) = \gamma(s, \gamma(t, \boldsymbol{q}))$ *para todos* $s, t \in \mathbb{R}$.

OBS: Para $t \in \mathbb{R}$ fixado, definamos $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$. φ_t é um homeomorfismo. Mais ainda, φ_t é um difeomorfismo.

O fluxo $\varphi(t, \mathbf{q}) = e^{it} \cdot \mathbf{q}$ é chamado de Fluxo de Hopf.

A 3-esfera como união de círculos

Definição

Os conjuntos $\{\varphi(t, \boldsymbol{q}) : t \in \mathbb{R}\}$ *são chamados* ***órbitas*** *do fluxo* φ.

Observação

- *As órbitas do fluxo são fechadas, simples e disjuntas.*
- *As funções* $t \mapsto \varphi(t, \boldsymbol{q})$ *são periódicas.*
- *Duas órbitas ou são iguais ou não se intersectam.*
- *As órbitas do fluxo de Hopf decompõem a 3-esfera em curvas fechadas e disjuntas que não se reduzem a um ponto.*

A 3-esfera como união de círculos

Seja $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ tal que $|z|^2 + |w|^2 = 1$. O conjunto

$$W = \{\lambda \cdot (z, w) \in \mathbb{C}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

é um subespaço linear complexo de dimensão (complexa) 1 em $\mathbb{C}^2$ que é transportado, pelo isomorfismo Φ, em um subespaço linear complexo de $\mathbb{H}$.

A imagem de W é

$$\{\lambda \cdot \mathbf{q} \in \mathbb{H} : \lambda \in \mathbb{C}\},$$

onde $\mathbf{q}$ é o quatérnio unitário com a forma matricial $M_{z,w}$.

Como $\|\lambda \cdot \mathbf{q}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{q}\| = |\lambda|$, a interseção entre o subespaço W e a 3-esfera é

$$W \cap S^3 = \{\lambda \cdot \mathbf{q} \in \mathbb{H} : \lambda \in \mathbb{C}\} \cap S^3 = \{e^{it} \cdot \mathbf{q} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Teorema

Todas as órbitas do fluxo de Hopf na 3-esfera S^3 têm a forma $W \cap S^3$, onde W é um subespaço unidimensional complexo de $\mathbb{H}$. Reciprocamente, cada interseção $W \cap S^3$ determina uma única órbita do fluxo de Hopf.