33º Colóquio Brasileiro de Matemática-IMPA

Uma agradável introdução a topologia e geometria de 3-variedades

Caio Sampaio
Luciana Vasconcelos.
caiorenan@ime.usp.br
lucianamvasc@ime.usp.br

19 de Julho de 2021

Resumo

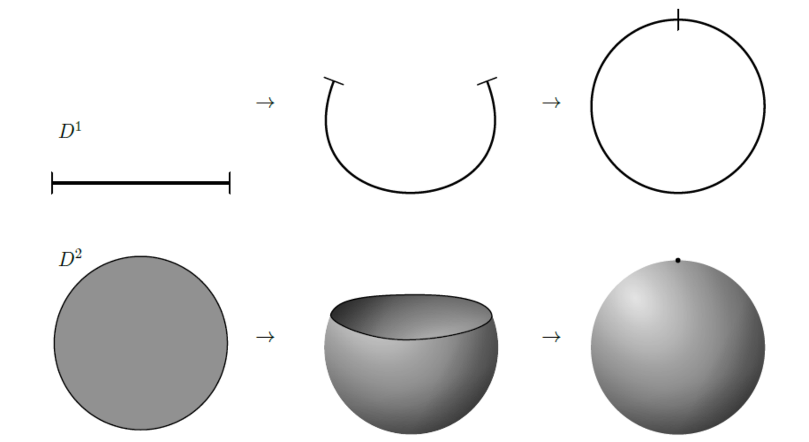
- A definição oficial da **esfera n-dimensional** é dada por

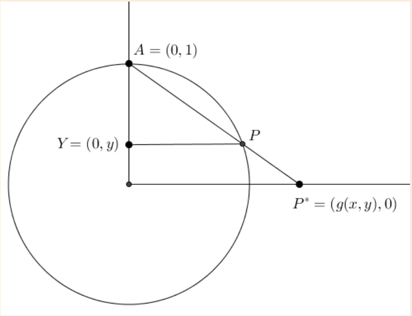
$$S^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\};$$

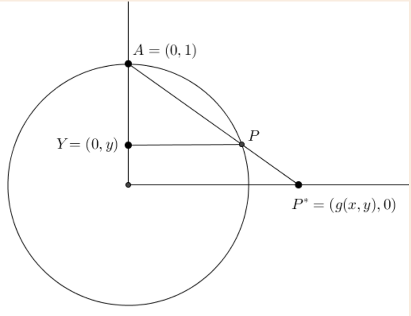
- A definição oficial da **esfera n-dimensional** é dada por

$$S^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\};$$

- Uma forma de pensar qualquer esfera S^n é como o espaço obtido adicionando-se um *ponto no infinito* ao espaço $\mathbb{R}^n$;


D^1
D^2

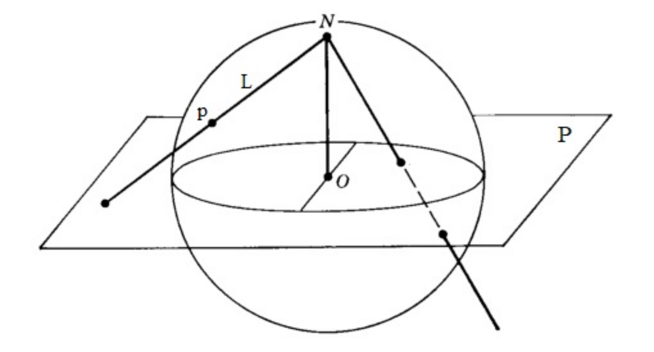

$A = (0, 1)$
$Y = (0, y)$
P
$P^* = (g(x, y), 0)$



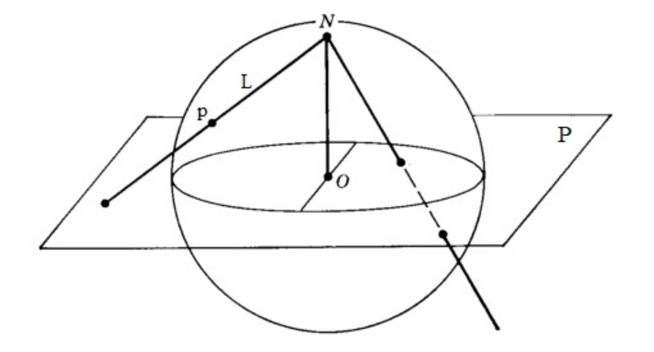
Utilizando a semelhança dos triângulos AYP e AOP^* encontramos que $\frac{g(x,y)}{1} = \frac{x}{1-y}$. Ou seja, $g : C \backslash \{(0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y) = \frac{x}{1 - y}$$

é a projeção estereográfica.



N
L
p
P
O



Consideremos $p = (a_1, ..., a_{n+1}) \in S^n$ e definamos a reta

$$L := \{(0, 0, ..., 1) + t \cdot (a_1, a_2, ..., a_{n+1} - 1) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(ta_1, ta_2, ..., 1 + t(a_{n+1} - 1)) : t \in \mathbb{R}\}$$

Consideremos o plano

$$P := \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}.$$

Consideremos o plano

$$P := \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}.$$

Daí,

$$L \cap P = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) = (ta_1, ta_2, ..., 0)\}$$

ou seja,

$$1 + t(a_{n+1} - 1) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1 - a_{n+1}}.$$

Logo, a projeção será dada por

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & S^n\backslash\{(0,0,...,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (a_1,a_2,...,a_{n+1}) & \longmapsto & \left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}},...,\frac{a_n}{1-a_{n+1}}\right) \end{array}$$

Fazendo um análogo podemos encontrar a inversa. Ou seja, tomemos $(x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $(0, 0, ..., 1) \in S^n$ e consideremos a seguinte reta

$$\begin{aligned} L' &= \{(0, 0, ..., 1) + t \cdot (x_1, x_2, ..., x_n, -1) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(tx_1, tx_2, ..., tx_n, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Fazendo um análogo podemos encontrar a inversa. Ou seja, tomemos $(x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $(0, 0, ..., 1) \in S^n$ e consideremos a seguinte reta

$$\begin{aligned} L' &= \{(0, 0, ..., 1) + t \cdot (x_1, x_2, ..., x_n, -1) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(tx_1, tx_2, ..., tx_n, 1 - t) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$t(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1) - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1}.$$

Fazendo um análogo podemos encontrar a inversa. Ou seja, tomemos $(x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $(0, 0, ..., 1) \in S^n$ e consideremos a seguinte reta

$$\begin{aligned} L' &= \{(0,0,...,1) + t \cdot (x_1, x_2, ..., x_n, -1) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(tx_1, tx_2, ..., tx_n, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$t(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1) - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 1}.$$

Existe um único ponto p tal que $L' \cap S^n = \{p\}$ e será da forma $p = \left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1}, ..., \frac{2x_n}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1}, \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+1}\right)$.

A inversa de φ, $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \backslash \{(0,0,...,1)\}$, é dada por

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, ..., \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right),$$

onde $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Definição

Seja X um espaço topológico, denotamos por $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ a compatificação de X por ∞.

Definição

Seja X um espaço topológico, denotamos por $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ a compatificação de X por ∞.

Observação

- *Os conjuntos abertos de $\hat{X}$ são de dois tipos: abertos de X ou conjuntos da forma $K^c \cup \{\infty\}$, onde K é compacto em X e $K^c = X \setminus K$.*

- *Se X for Hausdorff,então $\hat{X}$ é Hausdorff;*

- *$\hat{X}$ é compacto.*

Como podemos mostrar que $S^n \cong \hat{\mathbb{R}}^n$?

Como podemos mostrar que $S^n \cong \hat{\mathbb{R}}^n$?

Vamos provar que a projeção estereográfica induz um homeomorfismo entre S^n e $\hat{\mathbb{R}}^n$.

Temos que

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, ..., \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right),$$

onde $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Temos que

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{2x_1}{\|x\|^2 + 1}, ..., \frac{2x_n}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right),$$

onde $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Definamos $f : \hat{\mathbb{R}}^n \longrightarrow S^n$ fazendo

$$f(x) = \varphi^{-1}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } f(\infty) = N = (0, ..., 0, 1).$$

Mostraremos que f é contínua em ∞. Para isso, consideremos V uma vizinhança aberta de N em S^n.

Mostraremos que f é contínua em ∞. Para isso, consideremos V uma vizinhança aberta de N em S^n.

Afirmação: $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ é fechado e compacto em $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n\backslash\{N\}$.

Mostraremos que f é contínua em ∞. Para isso, consideremos V uma vizinhança aberta de N em S^n.

Afirmação: $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ é fechado e compacto em $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n\backslash\{N\}$.

Seja U uma cobertura aberta de $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ então $U \cup \{V\}$ é uma cobertura aberta de S^n.

Mostraremos que f é contínua em ∞. Para isso, consideremos V uma vizinhança aberta de N em S^n.

Afirmação: $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ é fechado e compacto em $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n\backslash\{N\}$.

Seja U uma cobertura aberta de $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ então $U \cup \{V\}$ é uma cobertura aberta de S^n.

Existe uma subcobertura finita $U' \subset U$ de modo que $U' \cup \{V\}$ cobre S^n.

Mostraremos que f é contínua em ∞. Para isso, consideremos V uma vizinhança aberta de N em S^n.

Afirmação: $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ é fechado e compacto em $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n) = S^n\backslash\{N\}$.

Seja U uma cobertura aberta de $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$ então $U \cup \{V\}$ é uma cobertura aberta de S^n.

Existe uma subcobertura finita $U' \subset U$ de modo que $U' \cup \{V\}$ cobre S^n.
Portanto, U' cobre $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n)\backslash V$, sendo assim é fechado e compacto.

φ^{-1} é homeomorfismo $\Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash \varphi(V)$ é fechado e compacto em $\mathbb{R}^n$.

φ^{-1} é homeomorfismo $\Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash \varphi(V)$ é fechado e compacto em $\mathbb{R}^n$.

Definindo $W = \varphi(V) \cup \{\infty\}$, teremos que W é uma vizinhança aberta de ∞.

φ^{-1} é homeomorfismo $\Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash \varphi(V)$ é fechado e compacto em $\mathbb{R}^n$.

Definindo $W = \varphi(V) \cup \{\infty\}$, teremos que W é uma vizinhança aberta de ∞.

Assim, W é uma vizinhança aberta de ∞ em $\hat{\mathbb{R}}^n$ e $f(W) = V$.

φ^{-1} é homeomorfismo $\Rightarrow \mathbb{R}^n \backslash \varphi(V)$ é fechado e compacto em $\mathbb{R}^n$.

Definindo $W = \varphi(V) \cup \{\infty\}$, teremos que W é uma vizinhança aberta de ∞.

Assim, W é uma vizinhança aberta de ∞ em $\hat{\mathbb{R}}^n$ e $f(W) = V$.

Logo, f é contínua. E, da compacidade de $\hat{\mathbb{R}}^n$ e do fato de S^n ser Hausdorff, segue que f é homeomorfismo.

Inversão

Definição

Dado um círculo $C \subset \mathbb{R}^2$*, de centro* O *e raio* $r > 0$*, definimos por* $\iota_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ *a inversão em* C*, por* $\iota_C(p) = p^*$*, onde* p^* *é o ponto, no raio com origem em* O *e contendo* P*, com a propriedade* $|OP||OP^*| = r^2$*.*

Definição

Dado um círculo $C \subset \mathbb{R}^2$, de centro O e raio $r > 0$, definimos por $\iota_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ a inversão em C, por $\iota_C(p) = p^*$, onde p^* é o ponto, no raio com origem em O e contendo P, com a propriedade $|OP||OP^*| = r^2$.

- Segue da definição que

$$\iota_C(x, y) = \frac{r^2}{|(x, y) - (x_0, y_0)|}[(x, y) - (x_0, y_0)] + (x_0, y_0)$$

Definição

Dado um círculo $C \subset \mathbb{R}^2$, de centro O e raio $r > 0$, definimos por $\iota_C : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ a inversão em C, por $\iota_C(p) = p^*$, onde p^* é o ponto, no raio com origem em O e contendo P, com a propriedade $|OP||OP^*| = r^2$.

- Segue da definição que

$$\iota_C(x, y) = \frac{r^2}{|(x, y) - (x_0, y_0)|}[(x, y) - (x_0, y_0)] + (x_0, y_0)$$

- Se C é um circulo de $r = 1$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$, temos que

$$\iota_C(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Inversão

OBS: Como não tivemos tempo hoje, na monitoria de quinta iremos aprofundar mais sobre inversões e abordar os demais tópicos que estão no sumário.